

# 人工智慧基礎數學 (I)

## AI Mathematic Fundamental -- SET (集合)

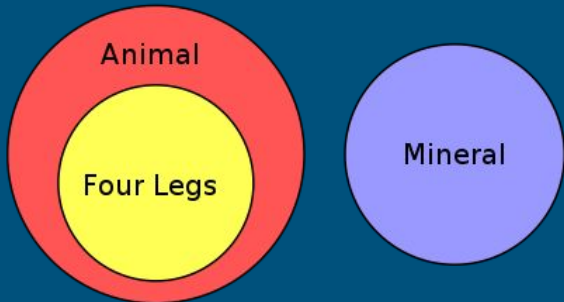
Yung-Chen Chou Ph.D.

E-mail: [yungchen@gmail.com](mailto:yungchen@gmail.com)

Web: <http://140.134.53.58/~yungchen>

iSchool @ FCU

Aug. 8, 2021

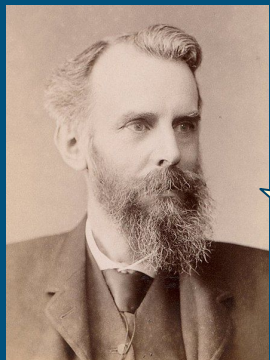


Euler diagram  
(尤拉圖)

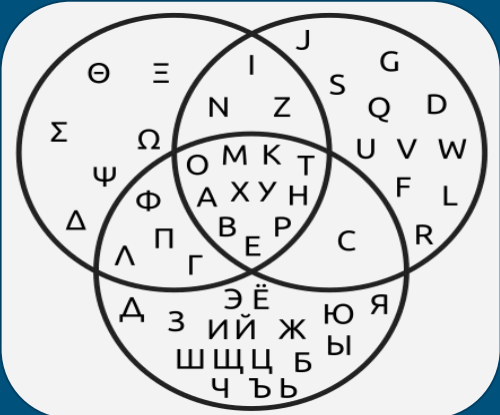
An Euler diagram illustrating that the set of "animals with four legs" is a subset of "animals", but the set of "minerals" is disjoint (has no members in common) with "animals"



Leonhard Euler (1707–1783) was a Swiss mathematician and physicist.



Venn diagram showing the uppercase glyphs shared by the Greek, Latin, and Russian alphabets



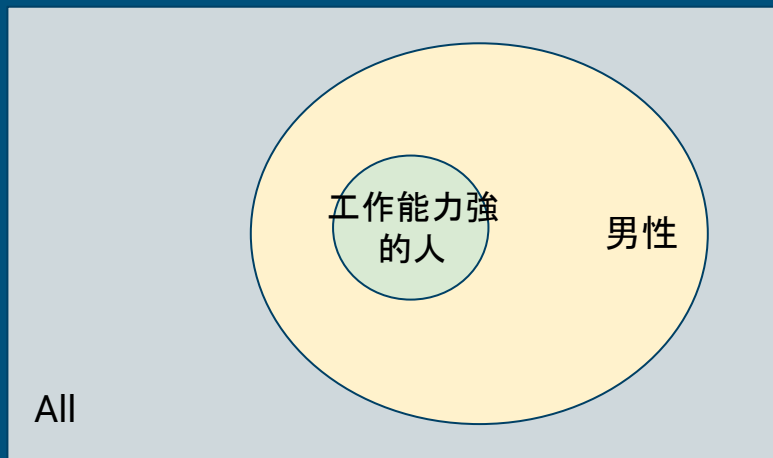
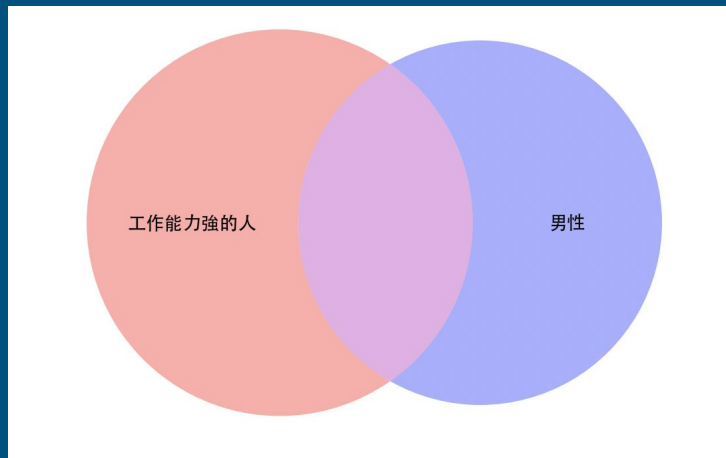
Venn diagram  
(維恩圖)

**John Venn** (4 August 1834 – 4 April 1923) was an English mathematician, logician and philosopher noted for introducing the Venn diagrams, which are used in logic, set theory, probability, statistics, and computer science.

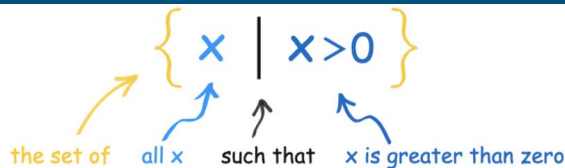
[https://en.wikipedia.org/wiki/Euler\\_diagram](https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_diagram)

# What is "set"?

- 集合 (Set) 通常是用**大括號** (curly brackets) 把**元素** (element) 包起來
- 在集合中的 "東西" 彼此用**逗號** "," (comma) 隔開
- 在集合中的東西可稱之為 "**元素** (elements)" 或者 "**成員** (members)"
- 試問, 會應用 AI 演算法 的人都會 程式設計的集合要怎麼畫?



# What is "set"?



It says "*the set of all  $x$ 's, such that  $x$  is greater than 0*".

In other words **any value greater than 0**

- **例題 1:** 如果要把大於0的正整數以集合的方式表示, 該如何做?
- **例題 2:** 如果是要表達  $x \leq 2$  or  $x > 3$  的實數, 該如何用集合方式表達?
- **例題 3:** 以拋硬幣的集合應該如何表示?
- **例題 4:** 以擲一個公正的骰子為例, 骰出可能的點數是 1~6點, 用 set 如何表示?

# 例子

---

- 某家公司的員工有張三 (中部)、李四 (南部)、王五(中部)、陳小花(中部)、葉小美(中部)、張三丰(南部)、張無忌(南部)、令狐沖 (北部)、任盈盈 (北部)、殷素素 (北部) 共 10 位
- 則, 每一位員工都是公司這個集合的 "元素", 所以公司的集合可以表示為  
{ 張三, 李四, 王五, 陳小花, 葉小美, 張三丰, 張無忌, 令狐沖, 任盈盈, 殷素素 }
- 那, 中部員工的集合為 { 張三, 王五, 陳小花, 葉小美 }, 而這個集合是 公司集合的一部份, 所以「中部員工」的集合是「公司員工」集的一個 子集合 (Subset)
- 請問, 「男員工」、「女員工」、「北部員工」、「南部員工」的集合要如何表示?

# 集合 -- 宇集合 (Universal Set)

## $\Omega$ or $\mathbb{U}$ : 宇集合 (Universal set)

- We call this the **universal set**. It's a set that contains everything. Well, not exactly everything. Everything that is relevant to our question.
- 宇集合: 所有可能元素組成的集合
- Ex: 擲一顆公正的骰子出現的點數  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  這就是擲骰子的 **宇集合**
- 練習: 那同時擲**兩顆公正骰子**的**宇集合**長得什麼模樣?

# 集合 -- 空集合 (Empty Set)

---

## $\emptyset$ : 空集合 (Empty (or Null) set)

---

- It is a set with no elements.
- There aren't any elements in it. Not one. Zero.
- As an example, think of the set of piano keys on a guitar.
- 另一個例子:  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  以及  $B = \{5, 6\}$  則  $A \cap B = \emptyset = \{\}$

# 補集 (Complete Set)

## 補集 (Complete set)

- 補集是指排除  $A$  集合元素外的元素組成的集合。
- $A$  集合 的補集表示為  $\bar{A}$  集合
- Ex: 擲一個公正骰子的集合  $\mathbb{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，而  $A$  集合是點數小於3的集合  $A = \{1, 2\}$ 
  - 那  $A$  集合的補集為  $\bar{A} = \{3, 4, 5, 6\}$

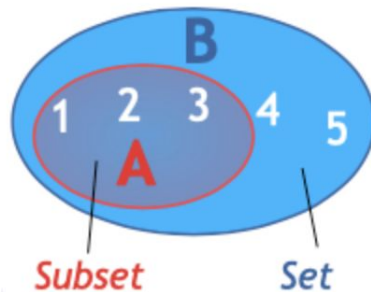


## 集合包含於另一個集合

- A is a subset of B if and only if every element of A is in B.
- 如果 **A集合** 中的元素同時也都屬於 **B集合**，可以說是 **A集合** 包含於 **B集合**。可用下方形式表示

$$A \subset B$$

- Ex: A集合 {1, 2, 3} 而 B集合 {1, 2, 3, 4, 5, 6}，因為 A 的元素都屬於 B 集合，所以  $A \subset B$



- ▶ **Exercise 1:** Is A a subset of B, where  $A = \{1, 3, 4\}$  and  $B = \{1, 4, 3, 2\}$ ?
- ▶ **Exercise 2:** Let A be all multiples of 4 and B be all multiples of 2. Is A a subset of B? and is B a subset of A?

## 真子集合 (Proper Subsets)

If we look at the definition of subsets and let our mind wander a bit, we come to a weird conclusion. Let  $A$  be a set. Is every element of  $A$  in  $A$ ?

- 這意味著  $A$  is a subset of  $A$ . 整個  $A$  集合 就是  $A$  集合的其中一個子集合
- 這樣的定義看起不那麼真切，因為怎麼會整個集合叫做一個集合中的子集合?
- 於是有人定義了 真子集合 (Proper Subsets)

$A$  is a proper subset of  $B$  if and only if every element of  $A$  is also in  $B$ , and there exists at least one element in  $B$  that is not in  $A$ .

**Example 1:**  $\{1, 2, 3\}$  is a subset of  $\{1, 2, 3\}$ , but it not a proper subset of  $\{1, 2, 3\}$ .

**Example 2:**  $\{1, 2, 3\}$  is a proper subset of  $\{1, 2, 3, 4\}$  because the element 4 is not in the first set.

## 集合包含於或等於另一個集合

- 我們也可以使用  $\subseteq$  符號來表示  $A$  集合「包含於或等於」 $B$  集合。
- 也可以用  $\supseteq$  與  $\supset$  符號來表示兩集合的關係
  - $\supseteq: B \supseteq A$  表示  $B$  集合「包含或等於」 $A$  集合
  - $\supset: B \supset A$  表示  $B$  集合「包含」 $A$  集合

**Example:**  $A$  集合為  $\{1, 2\}$ ， $B$  集合為  $\{1, 2, 3\}$ ，由於  $A$  集合所有的元素都「包含於」 $B$  集合，所以可以表示為  $A \subset B$ ，或者也可以表示為  $B$  集合「包含」 $A$  集合，也就是說可以表示為  $B \supset A$

# 集合運算 -- 聯集 Union

$\cup$ : union of 並，合集，聯集

給定 A, B 集合進行聯集運作是將 A 與 B 中的元素放在一起形成一個新的集合。

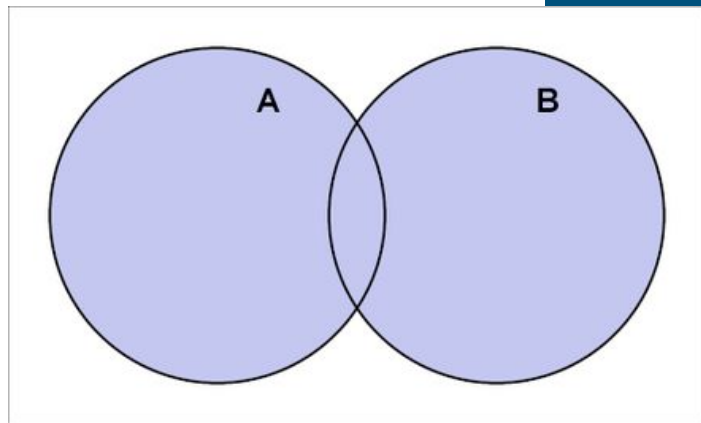
聯集的運算定義:  $A \cup B = \{e | e \in A \text{ or } e \in B\}$

A 集合:  $A = \{1, 2, 3, 4\}$

B 集合:  $B = \{3, 4, 5, 6\}$

則  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- 交換律:  $A \cup B = B \cup A$
- 結合律:  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$



# 集合運算 -- 交集 Intersection

$\cap$  : intersection of 交，交集

給定 A, B 集合進行交集運作是將 A 與 B 中都存在元素挑出來形成一個新的集合。

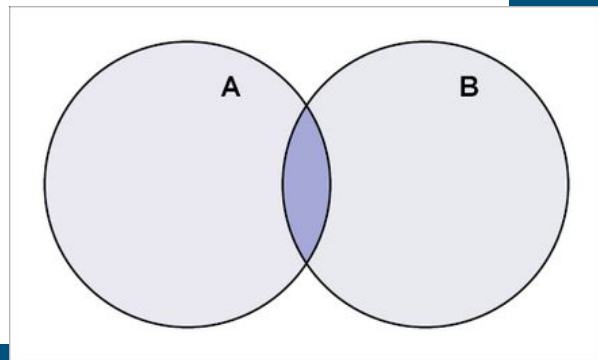
交集的運算定義:  $A \cap B = \{e | e \in A \text{ and } e \in B\}$

A 集合:  $A = \{1, 2, 3, 4\}$

B 集合:  $B = \{3, 4, 5, 6\}$

則  $A \cap B = \{3, 4\}$

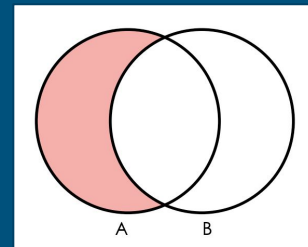
- 交換律:  $A \cap B = B \cap A$
- 結合律:  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$



## 差集 (Difference)

- You can also "subtract" one set from another.
- $A$ 集合:  $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- $B$ 集合:  $B = \{3, 4, 5, 6\}$
- 則  $A - B = \{1, 2\}$

**Example:** Taking Soccer and subtracting Tennis means people that play Soccer but NOT Tennis



```
B = {2, 3, 4, 5}
print("A union with B = ", A.union(B))
print("A intersection with B = ", A.intersection(B))
print("A difference with B = ", A.difference(B))
```

```
→ AI_Mathematics /usr/local/bin/python3 /Users/yungchen/Python_Workspace/AI_Mathematics/sets_demo1.py
A union with B = {1, 2, 3, 4, 5}
A intersection with B = {2, 3, 4}
A difference with B = {1}
→ AI_Mathematics █
```

# 德摩根定律 (De Morgan's Laws)

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ : A 集合聯集B集合的補集也可以看成是 A的補集與B的補集做交集後的結果
- Ex: 以擲一顆公正骰子為例。其中，字集合  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，而其中 A集合 ( $A = \{1, 3, 6\}$ ) 而 B集合 ( $B = \{3, 4, 5\}$ )，則  $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$  且  $\overline{A \cup B} = \{2\}$ 。這樣的結果也可以經由取得  $\overline{A} = \{2, 4, 5\}$  及  $\overline{B} = \{1, 2, 6\}$ ，接著可算得  $\overline{A \cup B} = \{2\} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ : A 集合交集B集合的補集也可以看成是 A的補集與B的補集做聯集後的結果
- Ex: 以擲一顆公正骰子為例。其中，字集合  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，而其中 A集合 ( $A = \{1, 3, 6\}$ ) 而 B集合 ( $B = \{3, 4, 5\}$ )，則  $A \cap B = \{3\}$  且  $\overline{A \cap B} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ 。這樣的結果也可以經由取得  $\overline{A} = \{2, 4, 5\}$  及  $\overline{B} = \{1, 2, 6\}$ ，接著可算得  $\overline{A \cap B} = \{1, 2, 4, 5, 6\} = \overline{A} \cup \overline{B}$

