人工智慧基礎數學 (I)
AI Mathematic Fundamental --
Proposition (命題)

Yung-Chen Chou Ph.D.
E-mail: yungchen@gmail.com
Web: http://140.134.53.58/~yungchen
iSchool @ FCU
Aug. 8, 2021

命題 (Proposition)

- 命題是一段敘述，根據事實的狀況，判定這個 命題是 真 (True) 還是假 (False)
- 命題不會同時為 True 又同時為 False
- True 通常 用 1 表示，False 通常 用 0 表示
- 命題分兩種
    - 簡單命題 (Primitive Proposition): 無法再細分成其他子命題的命題
    - 複合命題 (Compound Proposition): 將幾個簡單命題經連結詞 (Connectives) 組合形成複合命題

命題範例

- 若下雨則戶外地溼
    - p: 下雨
    - q: 戶外地溼
    - 「若下雨則戶外地溼」表示為 $p \to q$
- 下列敘述都是「命題」
    - Washington, D.C., is the capital of the United States of America. (True)
    - Toronto is the capital of Canada. (False, Ottawa is the capital of Canada)
    - 1 + 1 = 2 (True)
    - 2 + 2 = 3 (False)
- 「What time is it?」這個敘述是「命題」嗎?
- 否定命題 (Negation of the proposition)
    - 「若下雨則戶外地溼」的否定命題為「若下雨則戶外地不溼」

連接詞 (Conjunction)

- Let *p* and *q* be propositions. The conjunction of *p* and *q*, denoted by *p* ∧ *q*, is the proposition “*p* and *q*.”
- The conjunction *p* ∧ *q* is true when both *p* and *q* are true and is false otherwise.

TABLE 2 The Truth Table for the Conjunction of Two Propositions.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

TABLE 3 The Truth Table for the Disjunction of Two Propositions.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

連結詞	符號
not (非)	¬
and (且)	□
or (或)	V
imply (則)	→
If and only if (若且唯若)	↔

連結詞 (Conjunction)

- *p* is proposition "Rebecca's PC has more than 16GB free hard disk space"
- *q* is proposition "The processor in Rebecca's PC runs faster than 1 GHz"
- $p \land q$ 的命題會是如何?
  - "Rebecca's PC has more than 16GB free hard disk space, and the processor in Rebecca's PC runs faster than 1GHz."
  - 可簡化為 "Rebecca's PC has more than 16GB free hard disk space, and its processor runs faster than 1GHz."
- $\lor$: The use of the connective *or* in a disjunction corresponds to one of the two ways the word *or* is used in English, namely as an *inclusive or*.
  - "Students who have taken calculus or computer science can take this class."
- $p \lor q$ 的命題會是如何?
  - "Rebecca's PC has at least 16 GB free hard disk space, or the processor in Rebecca's PC runs faster than 1 GHz."

條件敘述 (Conditional Statements)

TABLE 5 The Truth Table for the Conditional Statement $p \to q$.

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- Let p and q be propositions. The conditional statement $p \to q$ is the proposition "if p, then q."
- The conditional statement $p \to q$ is false when p is true and q is false, and true otherwise.
- In the conditional statement $p \to q$, p is called *hypothesis* (or antecedent or premise) and q is called the *conclusion* (or consequence).
- A useful way to understand the truth value of a conditional statement is to think of an obligation or a contract. For example, the pledge many politicians make when running for office is
  - "If I am elected, then I will lower taxes."

邏輯推理

- 邏輯推理先有「**命題**」，然後會推理出「**結論**」
- 推理方法
  - 換質推理
  - 換位推理
  - 換質換位推理
- 命題基本句型:
  - $\textcolor{blue}{量詞} + \textcolor{brown}{主詞} + \textcolor{purple}{繫詞} + \textcolor{green}{述詞}$
    - Example: $\textcolor{blue}{有些} + \textcolor{brown}{主管} + \textcolor{purple}{是} + \textcolor{green}{女性}$
  - 量詞: 表現主詞的「量」，常用 $\boxed{所有}$ 、$\boxed{有些}$ 、$\boxed{沒有}$ 等
  - 主詞:
  - 繫詞: 用於連結「主詞」與「述詞」Ex:「是」
  - 述詞:
- 句型
  1. 全稱肯定型: 所有 + (主詞) + 是 + (述詞)，也可以說: (主詞) + 都是 + (述詞)
     a. Ex: 所有 石頭 是 硬的
     b. Ex: 石頭 都是 硬的
  2. 全稱否定型: 沒有 + (主詞) + 是 + (述詞)，也可以說: (主詞) + 都不是 + (述詞)
     a. Ex: 沒有 石頭 是 軟的
     b. Ex: 石頭 都不是 軟的
  3. 特稱肯定型: 有些 + (主詞) + 是 + (述詞)
     a. Ex: 有些 女性 是 工作能力強的人
  4. 特稱否定型: 有些 + (主詞) + 不是 + (述詞)
     a. Ex: 有些 寫程式的人 不是 資訊科系畢業

Example: $\textcolor{blue}{有些} + \textcolor{brown}{主管} + \textcolor{purple}{是} + \textcolor{green}{女性}$

```
\textcolor{blue}{有些} + \textcolor{brown}{主管} + \textcolor{purple}{是} + \textcolor{green}{女性}
```

換質推理 (Inversion)

- 將 $P \to Q$ 改為 $\neg P \to \neg Q$ ⇒ 白話文: 若P則Q，若 非P則 非Q
- 用於改變條件命題的結構
- **質**：命題語句可以是「**肯定語句**」或「**否定語句**」
  - 肯定語句 Ex: 有些主管是女性
  - 否定語句 Ex: 有些主管不是女性
- **換質**: 在不影響原意的情況下，將肯定換否定，或否定換 肯定

> 💡 注意「量詞」的換質
> -「所有」換質為 「沒有」
> -「沒有」換質為 「所有」
> -「有些」換質後仍為「有些」

- 推理規則:
  1. $\boxed{(\text{所有主詞}) + \text{是} + (\text{述詞})} \Rightarrow \boxed{(\text{沒有主詞})+\text{是}+(\text{非述詞})}$
  2. $\boxed{(\text{沒有主詞}) + \text{是} + (\text{述詞})} \Rightarrow \boxed{(\text{所 有主詞})+\text{是}+(\text{非述詞})}$
  3. $\boxed{(\text{有些主詞}) + \text{是} + (\text{述詞})} \Rightarrow \boxed{(\text{有些主詞})+\text{不是}+(\text{非述詞})}$
  4. $\boxed{(\text{有些主詞}) + \text{不是} + (\text{述詞})} \Rightarrow \boxed{(\text{有些主詞})+\text{是}+(\text{非述詞})}$
  5. 「⇒」的白話文是 「可推理出...」; Ex: $A \Rightarrow B$ 是指 A 可推論出 B，反過來則不適用
- 範例
  - 「所有石頭是硬的」 ⇒ 「沒有石頭是軟的」
  - 「有些主管是男性」⇒ 「有些主管不是女性」

換位推理 (Transposition/Conversion)

- 指將 $P \to Q$改為 $Q \to P$
- 將命題的主詞與述詞位置調換 (換位) 之後，仍保持原命題意思。
- 只適用於全稱否定型與特稱肯定型語句
- 推理原則
  1. $\boxed{\text{沒有} + (\text{主詞}) + \text{是} + (\text{述詞})} \Rightarrow \boxed{\text{沒有}+(\text{述詞})+\text{是} + (\text{主詞})}$
     a. **Example:** 有些 女性 是 工作能力強的人 ⇒ 有些 工作能力強的人 是 女性
  2. $\boxed{\text{有些} + (\text{主詞}) + \text{是} + (\text{述詞})} \Rightarrow \boxed{\text{有些}+(\text{述詞})+\text{是}+ (\text{主詞})}$
     a. **Example:** 沒有 優秀主管 是 工作能力不強的人 ⇒ 沒有 工作能力不強 的人 是 優秀主管

> 💡 「**優秀主管** 都是 **工作能力強的人**」 命題不符上述句型，無法**換位推論**為「**工作能力強的人** 都是 **優秀主管**」
> 「所有 **工作能力強的人**，筆記也寫得好」命題也不符上述句型，所以也無法**換位推論**為 「所有 筆記寫得好的人，**工作能力也強**」

換質換位推理 (contraposition, transposition)

- 在無法單用 「**換質推理**」或「**換位推理**」進行「**直接推理**」獲得結果時，可合併使用「**換質推論**」與 「**換位推論**」進行邏輯推論
- 只適用於 **全稱肯定型語句** 與 **特稱否定型語句**

▼ 推論原則:

1. $\boxed{\text{所有} + (\text{主詞}) + \text{是} + (\text{述詞})} \Rightarrow \boxed{\text{所有} + (\text{非述詞}) + \text{是} + (\text{非主詞})}$
   a. Example: 所有　程式設計師　都　寫過程式 ⇒ 所有　沒寫過程式的　都　不是程式設計師
2. $\boxed{\text{有些} + (\text{主詞}) + \text{不是} + (\text{述詞})} \Rightarrow \boxed{\text{有些} + (\text{非述詞}) + \text{不是} + (\text{非主詞})}$
   a. Example: 有些　寫程式的人　不是　資訊科系畢業 ⇒ 有些　非資訊科系畢業的　不是　寫程式的人

💡 「原命題」的真假與「換質換位」後的結果真假必須相同(否則就不叫邏輯推理)

反證法 (Proof by Contradiction)

- 歸謬法($Reductio\ \ Ad\ \ Absurdum$)
  - 是一種「間接論證」方式
  - 先假設某個命題不成立，然後推理出矛盾、不符合已知的事實或荒謬的結果，從而論斷該命題成立
- 是**狹義**的**歸謬法**，兩者的差別在於**反證法**只限於推理出邏輯上矛盾的結果
- 反證法經常應用於證明數學定理
- **Example**
  - 無法用**整數**及**分數**表示的數字，這樣的數稱之為「**無理數**」
  - 可以用「整數」或「分數」表示的數字，稱之為「有理數」
  - **命題**:「 圓 周率 π 為無理數 」 $\longleftarrow$ 很難用「直接證法」推理出來
  - 改換**命題**為 「 假設圓週率 π 為有理數，就應可用整數或分數形式呈現 」
  - 嚐試各種計算之後都無法將 π 寫成分數形式，表示「**新命題**」為假，這也表示了 π 不是有理數。即「**原命題**」為真

💡 目前有許多種方法證明 π 為無理數。請參考
https://en.wikipedia.org/wiki/Proof_that_π_is_irrational

邏輯沒有模糊空間，但機率有

- 數學的推理都有嚴謹的「邏輯性」，沒有模糊空間可言。
- 邏輯應用在真實世界時會遇到很大的困難
- 「感冒 ⇒ 發燒超過37度」
  - 命題基本上正確，但卻也存在感冒時頭痛、四肢無力與喉嚨痛等情況卻無發燒
  - 如果「原命題」是正確的，那**換質換位推論**「若體溫正常則沒感冒」，那體溫正常的人，就不能判定他有感冒 😵 ⁉️ 顯然這樣 也不太合理
  - 如果 AI 系統應用這樣的推論，那 AI系統應該會當機 😆😆😆

將機率與統計的思考導入AI 中

- 將**機率**導入**邏輯**的「**真假**」判斷
- 「感冒 ⇒ 發燒超過37度」的命題，調整成「感冒 ⇒ 發燒超過37度的機率有多少%」
- 「在試管中依標準流程加入藥物作用後，會發生這樣的反應」，只要完全按照流程操作，則無數次的實作都可以 100%重製結果
- 現實世界無法 100%
  - 「使用此肥料後，農作物的收穫量是否增加」
  - 「這種病人喝了這瓶藥之後症狀是否改善」

> 💡 雖然這些都無法像**數學推理**一樣直接推論結果，但仍可藉由**機率**，判斷出成功與失敗的百分比